DISCOS DE ACRECION Y TEORIAS METRICAS DE GRAVITACION

Carlos O. Loustó

FCAGLP, IAFE

RESUMEN:

La luminosidad de un disco de acreción alrededor de un objeto compacto está dada por: $L=(1-E(r_o))c^2 dM/dt$, donde dM/dt es la masa por unidad de tiempo que entra al disco y $E(r_o)$ es la energía en la última órbita circular estable vista desde el infinito dividido, la energía en reposo. Se calcula esta energía y la frecuencia máxima vista desde el infinito ν_m usando la métrica estática con simetría esférica más general. Luego se usan las fórmulas obtenidas para hacer cálculos con métricas particulares, distintas de la de Schwarzschild, para ver como varían $E(r_o)$ y ν_m con la teoría de gravitación utilizada.

I. INTRODUCCION

El modelo más conocido para fuentes galácticas de rayos X duros en el sistema estelar binario formado por una

---

Becario del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

estrella normal transfiriendo materia a su compañera, que es un objeto compacto. Esta materia cayendo en órbitas cuasi circulares formará un disco de acreción que será el que emitirá los rayos X observados. El gas tendrá orbitas cuasi circulares pues cualquier componente elíptica sería rápidamente amortiguada por el gas en órbitas cercanas.

El gas adquirirá una pequeña velocidad hacia el objeto compacto debido a la acción de los torques por viscosidad que transfieren energía y momento angular desde dentro hacia afuera del disco.

La fricción por viscosidad generará calor, el cual será radiado a través de las caras del disco. La energía es proporcionada por la pérdida de la energía total del gas al caer a lo largo del disco hasta la última órbita circular estable, después de lo cual el gas caerá casi sin radiar (Stroeger 1980).

Utilizando la métrica de Schwarzschild (ver Bardeen 1972 para la métrica de Kerr también) la última órbita circular estable tiene una coordenada $r_o=6m$ donde $m = GM/c^2$ y M es la masa de la fuente. En este r_o la energía en el infinito por energía en reposo es $E(r_o) = \sqrt{8/9}$. Si tomamos $E=1$ en el radio externo del disco y un flujo estacionario de materia (o su promedio temporal) la luminosidad total del disco de acreción será: $L=(1-E(r_o))c^2\, dM/dt$ (1) con dM/dt la masa por unidad de tiempo que entra al disco.

La ecuación (1) se obtiene del hecho que $c^2\, dM/dt$ es la energía por unidad de tiempo que entra al disco y $(1-E(r_o))$ es la eficiencia para transformar esta energía en calor por la acción de la viscosidad. Luego este calor es radiado por las caras del disco.

La estructura de los discos de acreción ha sido estudiada con la teoría Newtoniana (Shakura & Sunyaev 1973) y con Relatividad General (Novikov & Thorne 1973). Para saber más sobre discos de acreción se pueden ver los reviews (Pringle 1981 y Verbunt 1982).

II. SOLUCION AL PROBLEMA CON SIMETRIA ESFERICA

Puede probarse que la métrica estática con simetría esférica más general puede ponerse como (Misner et al., p. 594):

$$ds^2 = B(r)c^2dt^2 - A(r)dr^2 - H(r)d\omega^2$$

con $$d\omega^2 = d\theta^2 + sen^2(\theta)d\phi^2$$

Aún tenemos la libertad de transformar la coordenada r para elegir la función H(r) (por ejemplo $H(r) = -r^2$ en coordenadas de Schwarzschild).

Del principio variacional $\delta \int (ds/d\lambda)^2 d\lambda^2 = 0$ pueden deducirse las ecuaciones de movimiento (geodésicas) que nos conducen a las siguientes ecuaciones de conservación (con $\theta = \pi/2$):

$$B(r)dt/d\lambda = E \quad (1a)$$

$$H(r)d\phi/d\lambda = J \quad (1b)$$

$$(dr/d\lambda)^2 + V_{ef} = E^2 \quad (1c)$$

$$\text{con } V_{ef} = E^2 - |E^2/B - J^2/H + 1|/A$$

E y J son las constantes de movimiento asociadas a la energía y momento angular en el infinito.

En un órbita circular $dr/d\lambda = 0$, si queremos que ésta sea estable V_{ef} debe ser un mínimo (Misner et al. 1973, Box 25.6).

En una teoría métrica de gravitación habrá entonces una última órbita circular estable de radio r_o caracterizada por:

$$E^2 = V_{ef}(r_o)$$

$$dV_{ef}/dr \,|_{r_0} = 0$$

$$d^2V_{ef}/dr^2 \,|_{r_0} = 0$$

Partiendo de estas ecuaciones podemos hallar E y J en función de los coeficientes de la métrica y sus derivadas evaluados en r_o:

$$E^2 = -B^2H'/(BH'-B'H') \qquad (2a)$$

$$J^2 = -B'H^2/(BH'-B'H) \qquad (2b)$$

con $' = d\ /dr$

Ecuaciones válidas para toda órbita circular.

El radio r_o se obtiene de resolver la siguiente ecuación algebraica:

$$H'H(-B''B+2(B')^2)+BB'(H''H-2(H')^2)= 0 \qquad (2c)$$

Observese que ninguno de los resultados depende del coeficiente A(r) de la métrica.

Es interesante estudiar también la máxima frecuencia orbital observada desde el infinito ν_m, pues fue propuesta medirla como test de gravitación (Novikov & Thorne 1973).

$$\nu = d\phi/dt = JB/(HE) = \sqrt{B'/H'} \qquad (3)$$

donde hemos utilizado las ecuaciones (1) y (2).

III. CALCULOS PARTICULARES

Después de especificar los coeficientes B(r) y H(r) de la métrica se debe resolver la ecuación (2c) para hallar r_o, luego se reemplaza en (2a) y (3) para hallar $E(r_o)$ y $\nu(r_o) = \nu_m$ que son los datos directamente conectados con la observación. Procediendo así para varias métricas soluciones de otras teorías de gravitación, hallamos:

1) Teorías Escalares-tensoriales: Tienen como solución la métrica de Schwarzschild (Will 1981, p. 265).

$$ds^2 = -(1-2m/r)c^2dt^2+(1-2m/r)^{-1}dr^2+r^2d\omega^2$$

Se hallan entonces los mismos resultados que en Relatividad General:

$r_o = 6m$, $E(r_o)= \sqrt{8/9}$,

$$\nu(r_o) = \nu_{RG}=(6\sqrt{6}m)^{-1}=2.10^3 \ (M_\odot/M) \ seg^{-1}.$$

2) Teoría de Gauge (Chang & Johnson 1980):

$$ds^2 = -EXP(-2m/r)c^2dt^2+EXP(2m/r)\left[dr^2+r^2+d\omega^2\right]$$

$$r_o = (3+\sqrt{5})m \quad , \quad \nu_{RG}/\nu(r_o) = 1.074$$

$$\Delta L/L = (L-L_{RG})/L_{RG}= -4.2\%$$

(usando $L = (1-E(r_o))c^2dM/dt$).

Estos resultados son idénticos a los que se obtendrían con la teoría de Rosen (Will 1981, p. 266) en la aproximación $M_\Lambda/M_\phi \simeq \gamma \simeq 1$.

3) Teoría de Lightman-Lee (Bardeen et al. 1979, p. 105):

$$ds^2= -\left[(1-u/2)^2/(1+u/2)^2\right]c^2dt^2 +$$

$$\left[(1-u/2)^2/(1-1.5u)^2\right](dr^2+r^2d\omega^2)$$

con $u = m/r$

$r_o = 7.2975m$, $\Delta L/L = -24\%$, $\nu_{RG} / \nu(r_o)= 1.63$

Uno podría pensar que estos resultados cercanos a los de Relatividad General se deben al uso de métricas que tienen el mismo límite Post Newtoniano que el de la Schwarzschild, pero el siguiente ejemplo muestra que este razonamiento no es correcto.

4) Tomemos la siguiente métrica $B(r)=-(1-2m/r+\Omega(m/r)^3)$ y $H(r)=-r^2$. Ω será un parámetro que medirá desviaciones a partir de la métrica de Schwarzschild.

La ecuación (2c) puede ponerse como:

$$\Omega = \left[20u+3\ {}^{3}\!\sqrt{-320u+240u+9}\right]/(30u)$$

Mientras que:

$$E^2 = \left[1-4u+4u^2+2\Omega u^3-4\Omega u^4+\Omega^2u^6\right]/\left[1-3u+2.5\Omega u^3\right]$$
$$(m\nu)^2 = u^3-1.5\Omega u^5$$

La solución numérica de estas ecuaciones se representa en las figuras 1 y 2.

IV. CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo deben tomarse en cuenta en la astronomía observacional cuando se utiliza la ecuación $L=(1-E(r_o))c^2dM/dt$ para hallar dM/dt a partir de L y el $E(r_o)$ de Relatividad General. Aunque la teoría de Einstein ha pasado con éxito todos los tests de campo débil (P-P-N), no lo ha hecho en el caso cuando el campo es intenso. Un parámetro como el Ω, sobre el cual no hay restricciones experimentales, con un valor cercano a 2.2, produce una luminosidad siete veces mayor y un período mínimo de un tercio comparado con los valores de Relatividad General.

Por otro lado, si pudieramos medir dM/dt o la máxima frecuencia ν_m tendríamos un test para gravitación en el régimen de campo intenso.

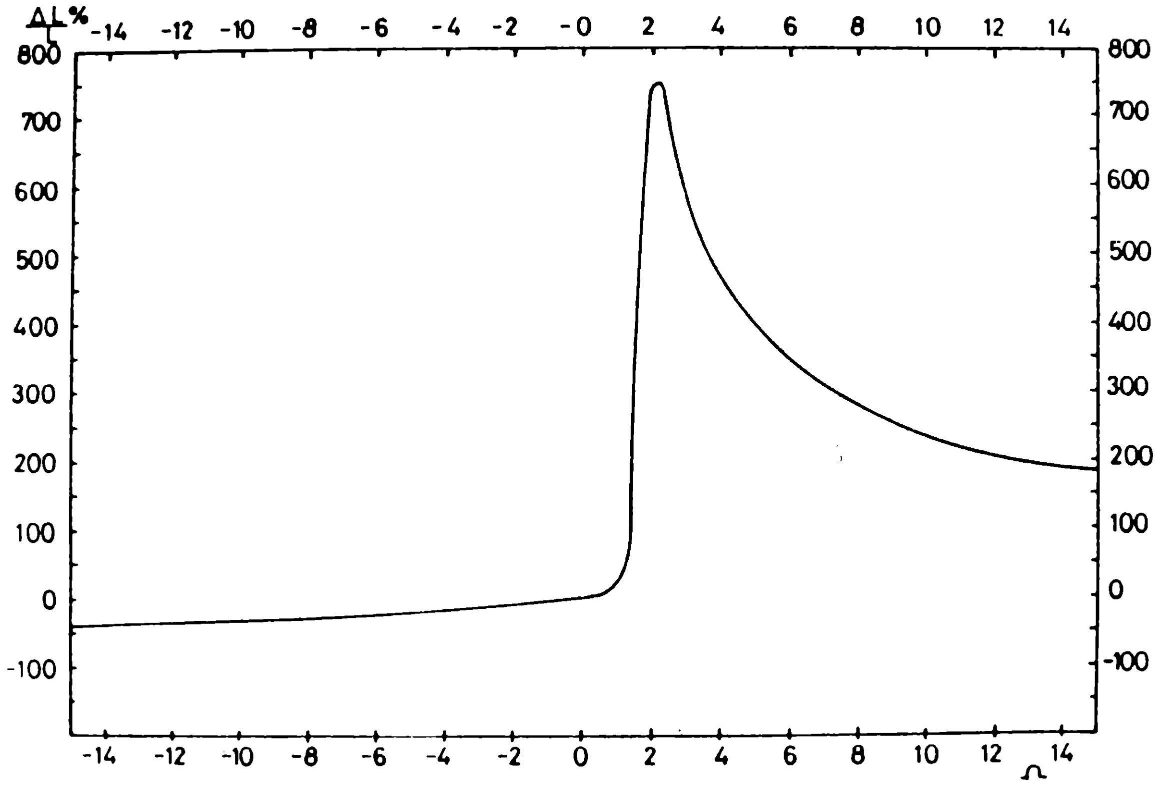

Figura 1: Se muestra la desviación de la luminosidad relativa a la predicha por Relatividad General, en porcentaje: ΔL/L como función de Ω. Para Ω =2.2 la luminosidad es mayor que 7 veces la de Relatividad General.

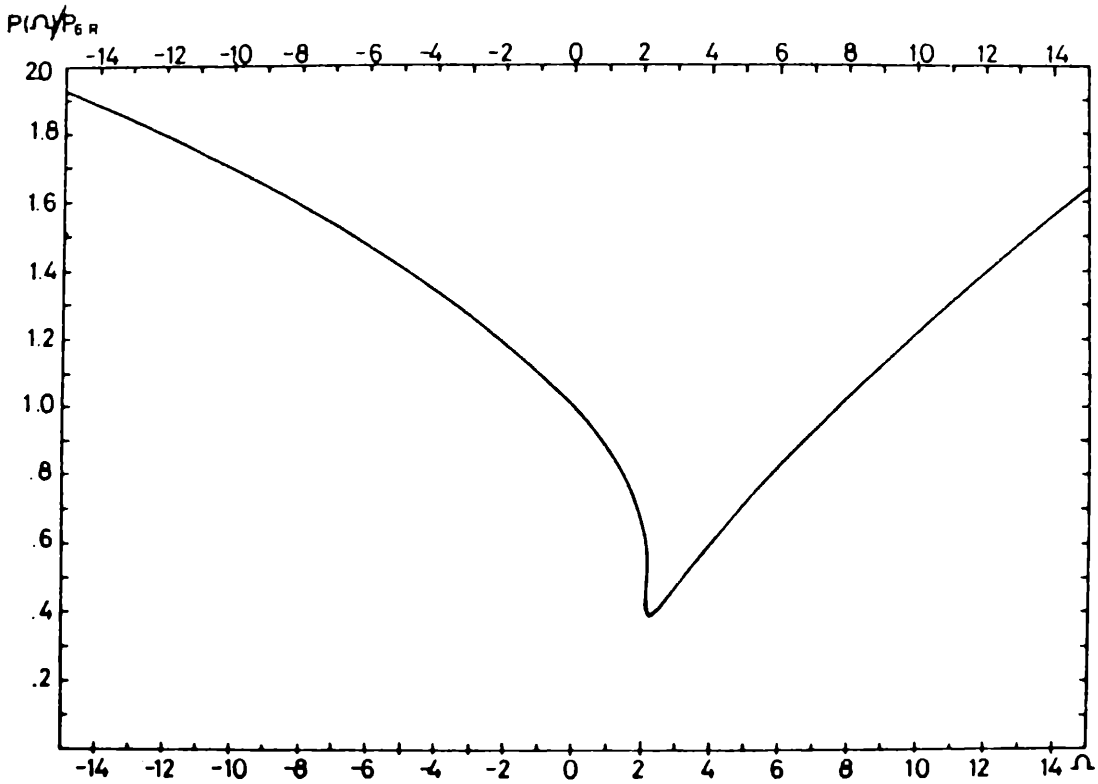

Figura 2: Se muestra el período orbital mínimo para una órbita circular en función del parámetro Ω . Para Ω=2.2 existe un mínimo de casi un tercio del valor de Relatividad General.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a los Profesores M.A. Castagnino y H. Vucetich por sus útiles consejos sobre este tema. También quisiera agradecer a los señores N. Corriols y R. Lafon por su ayuda en la preparación de los gráficos y el material fotográfico.

REFERENCIAS

1. Bardeen, J.M. et al. 1972, Astrophys.J. **178**, 347.
2. Chang, D.B. & Johnson, H.H. 1980, Phys. Rev. **210** N^{o} 4, 874.
3. Lightman, A.P. et al. 1979, "Problem book in relativity and gravitation", Princeton U.P., Princeton.
4. Misner. C.W. et al. 1973, "Gravitation", W.H. Freeman & Co., San Francisco.
5. Novikov, I.D. & Thorne, K.S. 1973, "Black Hole Astrophysics" in "Black Holes", Les Houches, C. DeWitt & B. DeWitt eds., Gordon & Breach, New York, p. 343.
6. Pringle, J.P. 1981, Ann. Rev. of Astron. Astr. **19**, 137.
7. Shakura, N.I. & Sunyaev. 1973, Astron. & Astroph. **24**, 337.
8. Stroeger, W.R. 1980, Astroph.J. **235**, 216.
9. Verbunt, F. 1982, Sp. Sci. Rev. **32**, 379.
10. Will, C.M. 1981, "Theory and experiment in gravitational Physics", Cambridge U.P., Cambridge.